Лекція № 9

Дія як функція координат і часу.

Крім підходів Ньютона, Лагранжа та Гамільтона, існують й інші формулювання механіки. Вибір тих чи інших підходів пов'язаний із зручністю розв'язання різних задач. Один із підходів пов'язаний з так званим рівнянням Гамільтона - Якобі. Але для формулювання цього методу необхідно спочатку ввести до розгляду можливість залежності дії від координат та часу.

Досі ми розглядали дію, як інтеграл від функції Лагранжа $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt$, тобто як *число* (з певною розмірністю). При варіюванні дії фіксувалися координати (але не швидкості) в початковий і кінцевий моменти часу (Рис.21.1).

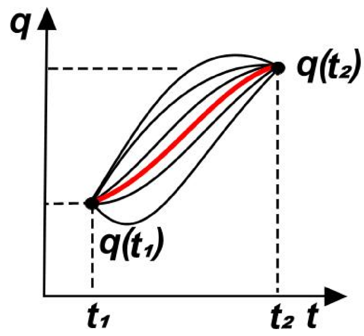

Рис.21.1

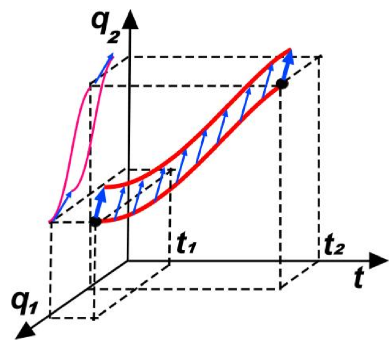

Рис.21.2

З іншого боку, щодо теореми Е.Нетер ми розглянули варіацію дії за наявності симетрії, коли функція Лагранжа не змінювалася при однопараметричный зміні координат. Але при цьому змінювалися початкові та кінцеві кординати системи (Рис.21.2). При цьому незмінність варіацій у початковий та кінцевий моменти давала вираз для відповідного інтегралу руху. Сам рух вздовж траєкторіъ вважався визначеним рівняннями Лагранжа.

Тепер ми розглянемо інший тип варіації руху системи. Нехай координата в початковий момент часу буде фіксована, але ми візьмемо два різні значення координати в кінцевий момент часу t_2: ($q(t_2)$ і Рис. $q'(t_2)$ на Рис.21.3). Для кожного з цих значень проведемо варіацію дії, знайдемо справжні траєкторії (червоні на малюнку), які є рішеннями рівняння Лагранжа, та значення дії цих істинних траєкторій. Знайдемо різницю цих значень при малій різниці $q(t_2)$ та $q'(t_2)$. Як було показано в Лекції №3, воно дорівнює

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt\,. \tag{21.1}$$

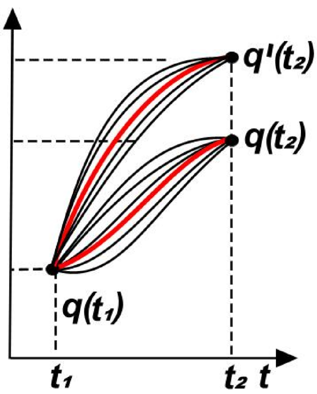

Рис.21.3

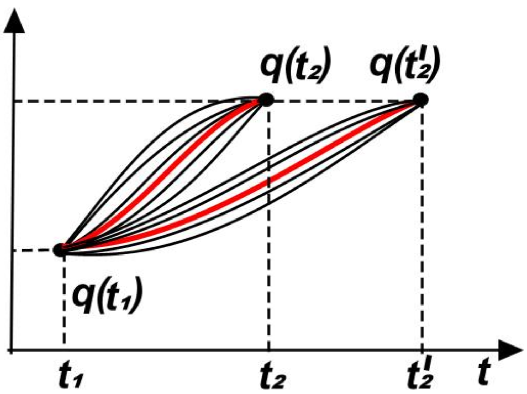

Рис.21.4

Раніше, при фіксованій варіації координати в момент часу t_2, занулявся перший доданок, і після вимоги $\delta S = 0$ занулявся підінтегральний вираз, що давало нам рівняння Лагранжа. Тепер ми маємо справу з істинними траєкторіями, для яких підінтегральний вираз дорівнює нулю, але перший доданок тепер відрізняється від нуля і дає приріст дії

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\left(t_2\right) = p\,\delta q\,, \tag{21.2}$$

або, у разі кількох ступенів вільності

$$\delta S = \sum p_i \delta q_i\,. \tag{21.3}$$

Тобто, дія стає функцією координат $S = S\left(q_i\right)$, і похідні по координатах від цієї функції рівні відповідним імпульсам:

$$\frac{\partial S(q)}{\partial q_i} = p_i. \tag{21.4}$$

Можна поставити завдання по-іншому, і, фіксуючи початкові умови, розглядати систему, що приймає наприкінці процесу однакову координату, але в різні моменти часу (Рис.21.3). Знову, при варіюванні вибиратимемо справжні рухи для двох процесів. Дія стає функцією часу наприкінці руху. Цю залежність легко отримати з таких міркувань. Оскільки $S = \int L dt$, то

$$\frac{dS}{dt} = L\,. \tag{21.5}$$

Оскільки дія стає функцією координат та часу, то повна похідна за часом дорівнює

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i = L . \quad (21.6)$$

Але, оскільки за визначенням енергія дорівнює $E = \sum p_i \dot{q}_i - L$, то отримуємо остаточно

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(p, q, t\right). \quad (21.7)$$

Два співвідношення (21.4) та (21.7) можна записати у єдиному вигляді:

$$dS = \sum p_i dq_i - H\left(p, q, t\right)dt , \quad (21.8)$$

або наступним чином

$$S = \int\left(\sum p_i dq_i - Hdt\right). \quad (21.9)$$

Ми не пишемо індексів у координат і часу, маючи на увазі їх значення наприкінці процесу. Але можна варіювати і початкові значення координат та часу. Тоді узагальнення формули (21.8) матиме вигляд

$$dS = \sum p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)} . \quad (21.10)$$

Повернемося до рівнянь (21.4; 21.7). З цієї системи $2s+1$ рівняння можна виключити імпульси, підставивши вирази (21.4) для них у гамільтоніан системи в рівнянні (21.7). При цьому ми отримаємо одне рівняння, але у часткових похідних:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0 . \quad (21.11)$$

Це рівняння у часткових похідних першого порядку (тобто містить часткові похідні лише першого порядку) називається ***рівнянням Гамільтона-Якобі*** .